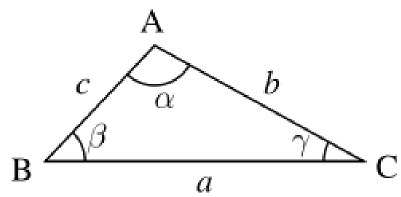
ТЕМА №5

1. Триъгълник

Триъгълникът е равнинна фигура, ограничена от три точки, нележащи на една права, и трите отсечки, които ги съединяват. Стандартните означения в произволен триъгълник са дадени на фиг.1.1:



Фигура 1.1. Основни означения в триъгълник

Видове триъгълници:

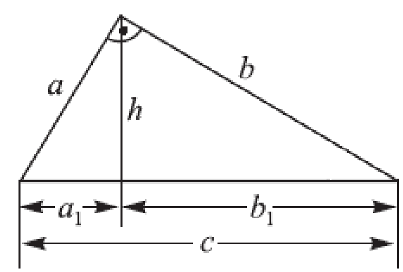
- **Равностранен триъгълник** - когато дължините на трите страни са равни. В равностранните триъгълници ъглите също са равни и всеки от тях е равен на 60°;
- **Равнобедрен триъгълник** - когато дължините на две от страните са равни. Двете равни страни се наричат **бедра**, а третата - **основа**. Този триъгълник има равни ъгли при основата;
- **Разностранен триъгълник** - когато всичките му страни са с различни дължини. Този триъгълник има три различни ъгла.

Сумата от ъглите на триъгълник е равна на $180°$**.**

Според големината на най-големия си вътрешен ъгъл, триъгълникът може да бъде:

- **Остроъгълен триъгълник** - триъгълник, при който всички вътрешни ъгли са по-малки от 90°.
- **Тъпоъгълен триъгълник** - триъгълник, който има вътрешен ъгъл, по-голям от 90°.
- **Правоъгълен триъгълник** - триъгълник, който има ъгъл от 90°. Страната, срещулежаща на правия ъгъл, се нарича **хипотенуза** и е най-дългата страна във всеки правоъгълен триъгълник. Другите две страни се наричат **катети**.

Катетите на правоъгълен триъгълник ABC се означават с a и b, хипотенузата с c а височината CH към хипотенузата с h (фиг. 1.2).



Фигура 1.2. Основни означения в правоъгълен триъгълник

Питагорова теорема: сборът от квадратите на катетите е равен на квадрата на хипотенузата, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$.

В сила са следните **метрични зависимости**:

$$h^2 = a_1.b_1$$
$$a^2 = a_1.c$$
$$b^2 = b_1.c$$

Неравенства в триъгълник - за страните на всеки триъгълник са изпълнени неравенствата:

- $a < b + c$
- $b < a + c$
- $c < a + b$

Еднакви триъгълници - два триъгълника са еднакви, ако съответните им страни и ъгли са равни. Има четири признака за еднаквост на триъгълници:

- *Първи признак*: Ако две страни и ъгъл заключен между тях на един триъгълник са съответно равни на две страни и ъгъла заключен между тях от друг триъгълник, то триъгълниците са еднакви.
- *Втори признак:* Ако два ъгъла и страна на един триъгълник са съответно равни на два ъгъла и страна на друг триъгълник, то триъгълниците са еднакви.
- *Трети признак:* Ако трите страни на един триъгълник са съответно равни на трите страни на друг триъгълник, то триъгълниците са еднакви.
- *Четвърти признак:* Ако две страни и ъгъл срещу по-голямата от тях в един триъгълник са съответно равни на две страни и ъгъл срещу по-голямата от тях в друг триъгълник, то триъгълниците са еднакви.

Подобие на триъгълници - два триъгълника са подобни, ако ъглите на единия са равни на ъглите на другия и страните, които съединяват върховете на равните ъгли, са пропорционални. Има три признака за подобие на триъгълници:

- *Първи признак:* Ако два ъгъла от един триъгълник са равни на два ъгъла от друг триъгълник, то триъгълниците са подобни.
- *Втори признак:* Ако две страни на един триъгълник са съответно пропорционални на две страни от друг триъгълник и ъглите, заключени между тези страни, са равни, то триъгълниците са подобни.
- *Трети признак:* Ако страните на един триъгълник са пропорционални на страните на друг триъгълник, то триъгълниците са подобни.

Косинусова теорема:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2c.b.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos\beta$$

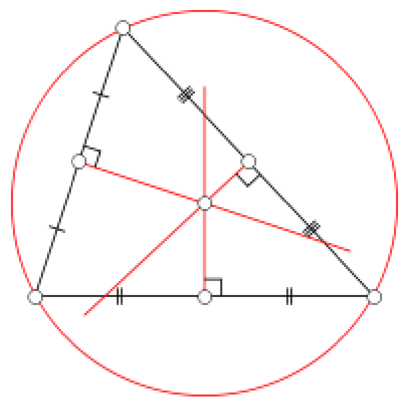
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\gamma$$

Синусова теорема:

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$$

където R е радиуса на описаната около триъгълника окръжност.

Описана около триъгълник окръжност се нарича окръжност, която минава и през трите му върха (фиг. 1.3).

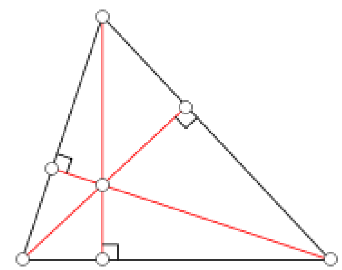


Фигура 1.3. Пресечната точка на симетралите съвпада с центъра на описаната около триъгълника окръжност

Симетралите в триъгълник са прави, които са перпендикулярни на страните и минават през средите им. Трите симетрали се пресичат в точка, която е и център на описаната около триъгълника окръжност.

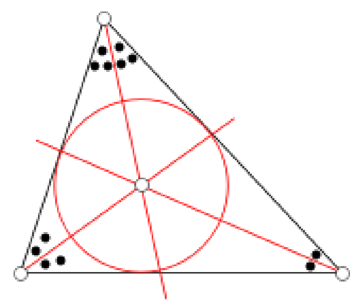
Теоремата на Талес: Ако центърът на окръжността, описана около един триъгълник, лежи на една от страните на триъгълника, то срещуположният ъгъл на триъгълника е прав. Ако центърът на описаната около триъгълника окръжност се намира във вътрешността на триъгълника, то триъгълникът е остроъгълен, а ако центърът е извън триъгълника, то триъгълникът е тъпоъгълен.

Височини в триъгълника са перпендикулярите прави, спуснати от върховете на триъгълника към срещуположните страни. Трите височини на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която се нарича **ортоцентър** (фиг. 1.4).



Фигура 1.4. Ортоцентър

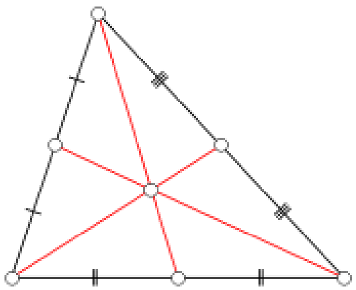
Ъглополовящи в един триъгълник са тези прави, които минават през върховете на ъглите и ги разполовяват. Пресечната им точка е център на **вписаната** в триъгълника окръжност (фиг. 1.5).



Фигура 1.5. Пресечна точка на ъглополовящите

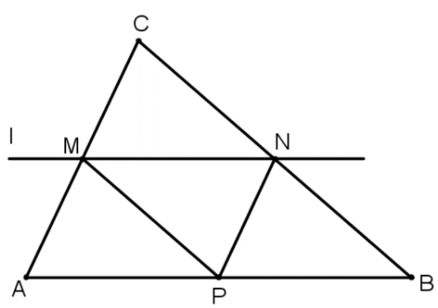
Основно свойство на ъглополовящите в триъгълника: Вътрешната ъглополовяща на всеки ъгъл на триъгълника разделя срещуположната страна на този ъгъл на отсечки, чието отношение е равно на отношението на прилежащите към тях страни на триъгълника.

Медиани в триъгълника са правите, които минават през средите на срещулежащите им страни. Трите медиани се пресичат в една точка, която се нарича **медицентър** на триъгълника (фиг. 1.6). **Медицентърът** разделя всяка медиана в отношение $2:1$, т.е. разстоянието от върха до медицентъра е два пъти по-голямо от разстоянието от медицентъра до средата на срещулежащата страна.



Фигура 1.6. Медицентърът е центъра на тежестта

Средна отсечка на триъгълник е отсечка, съединяваща средите на две от неговите страни. Нейната дължина е равна на половината от дължината на срещулежащата страна на триъгълника (фиг. 1.7).



Фигура 1.7. Средна отсечка

Лице на триъгълник - Изчисляването на лицето на триъгълника може да стане по няколко начина:

- Лицето S на триъгълника намираме като полупроизведение на дължината на коя да е негова страна и височината, спусната към нея:

$$S = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_b}{2} = \frac{c.h_c}{2}$$

- С помощта на тригонометрични функции:

$$S = \frac{a.b.sin\gamma}{2} = \frac{a.c.sin\beta}{2} = \frac{b.c.sin\alpha}{2}$$

- Херонова формула:

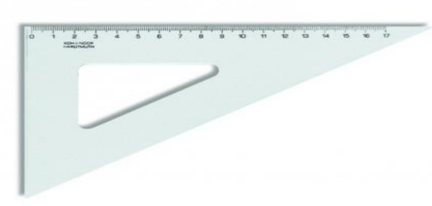
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

  където p е полупериметърът на триъгълника.

- Друга формула:

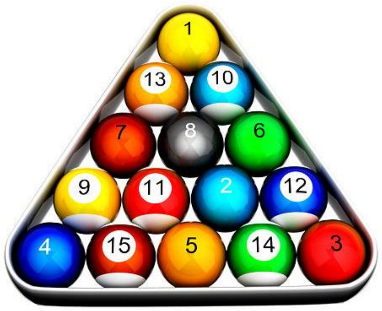
$$S = \frac{abc}{4R} = p.r$$

Приложения:



Фигура 1.8. Чертожен инструмент

Фигура 1.9. Огърлица от подобни триъгълници



Фигура 1.10. Топки за билярд

Фигура 1.11. Стенен часовник с форма на триъгълник

Задачи за триъгълник

Задача 1. Да се намери лицето на правоъгълен триъгълник с дължина на хипотенузата 5 см и сбор от дължините на катетите 7 см.

Решение: Съставя се система уравнения от втора степен като се използва Питагоровата теорема и връзката между дължините на катетите дадено по условие

$$\left| \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 25 \\ a + b = 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 25 \\ a = 7 - b \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$(7 - b)^2 + b^2 = 25$$

$$49 - 14b + b^2 + b^2 = 25$$

$$b^2 - 7b + 12 = 0$$

$$b_1 = \frac{7 + 1}{2} = 4 \text{ см} \Rightarrow a_1 = 7 - 4 = 3 \text{ см}$$

$$b_2 = \frac{7 - 1}{2} = 3 \text{ см} \Rightarrow a_2 = 7 - 3 = 4 \text{ см}$$

$$S = \frac{a.b.sin(90°)}{2} = \frac{3.4.1}{2} = 6 \text{ кв. см.}$$

Задача 2. Даден е триъгълник ΔABC, за който $AC = 3$ см, $BC = 6$ см, $\measuredangle ACB = 120°$. CL е ъглополовяща на ъгъла при върха C. Да се намерят дължините на AL и BL.

Решение:

Прилага се Косинусова теорема за $\Delta\ ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.cos(120°)$$

$$AB^2 = 3^2 + 6^2 - 2.3.6.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AB = \sqrt{63} \text{ см.}$$

От свойството на ъглополовящата в триъгълника, се получава отношението

$$\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB - BL}{BL} = \frac{\sqrt{63} - BL}{BL} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BL = \frac{2}{3}\sqrt{63} \text{ см}, \quad AL = \frac{\sqrt{63}}{3} \text{ см}$$

Задача 3. Дължините на страните на триъгълник са равни на $a = 4$ см, $b = 13$ см, $c = 15$ см . Да се намери:

а) лицето на триъгълника;

б) радиуса на вписаната в триъгълника окръжност;

в)радиуса на описаната около триъгълника окръжност.

Решение:

а) Съгласно Хероновата формула, полупериметърът на триъгълника е равен на 16 см. Тогава

$$S = \sqrt{16.12.3.1} = \sqrt{4^2.3^2.2^2} = 24 \text{ кв. см.}$$

б) $S = p.r, \qquad 24 = 16.r \longrightarrow r = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ см

в) $S = \frac{a.b.c}{4R} \Rightarrow \frac{4.13.15}{4R} = 24$ кв. см

$$R = \frac{13.15}{24} = 8{,}125 \text{ см}$$

Задача 4. В триъгълник ABC ъглополовящите на ъглите при върховете A и B се пресичат в точка L. Да се намери градусната мярка на $\measuredangle ALB$, ако $\measuredangle BAC = 40°$, $\measuredangle ABC = 50°$.

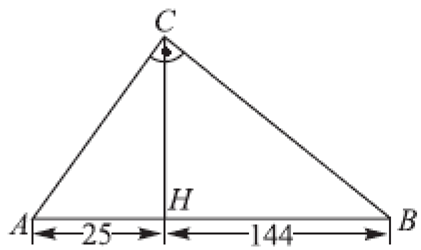
Решение:

$$\measuredangle ABL + \measuredangle BAL + \measuredangle ALB = 180°$$

$\measuredangle BAL = \frac{1}{2}.\measuredangle BAC = 20°$ и $\measuredangle ABL = \frac{1}{2}.\measuredangle ABC = 25°.$

Следователно $\measuredangle ALB = 180° - 25° - 20° = 135°.$

Задача 5. По данните от фиг. 1.12, да се намерят дължините на CH и CB.



Фигура 1.12

Решение: От метричните зависимости в правоъгълен триъгълник следва $h^2 = a_1 . b_1$

$$h^2 = 25.144, \quad h = \sqrt{5^2 . 12^2} = 5.12 = 60 \text{ см.}$$

Прилага се Питагорова теорема за $\Delta\ BHC$:

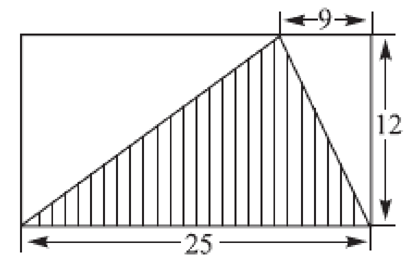
$$a^2 = h^2 + {b_1}^2$$

$$a^2 = 60^2 + 144^2 = 24336 \Rightarrow a = \sqrt{24336} = 156 \text{ см.}$$

Задача 6. В остроъгълния триъгълник $\Delta\ ABC$ височините AA_1 и BB_1 се пресичат в точка H. Да се намери градусната мярка на ъгъл $\measuredangle AHB$, ако $\measuredangle \mathrm{A} = 48°, \measuredangle B = 82°$.

Задача 7. Точките P и Q са съответно от страните AB и AC на $\Delta\ ABC$ и такива, че $\measuredangle BPC = 80°, \measuredangle CQB = 45°$. Да се докаже, че ако $\measuredangle BAC = 35°, PC \perp BQ$.

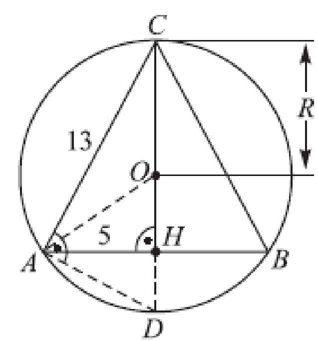
Задача 8. Да се провери дали защрихованият на фиг. 1.13 триъгълник е правоъгълен.



Фигура 1.13

Задача 9. Да се намери дължината на височината към основата на равнобедрен триъгълник с основа 42 см и бедро 29 см.

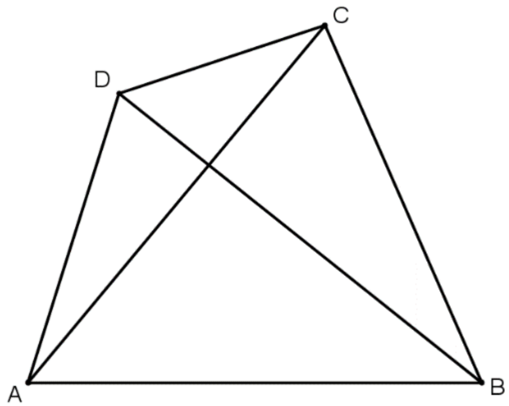
Задача 10. Основата на равнобедрен триъгълник е равна на 10 см, а височината към нея - 12 см. Да се намери радиуса на описаната около триъгълника окръжност (фиг. 1.14).



Фигура 1.14

2. Четириъгълник

Четириъгълникът е равнинна фигура, която има четири ъгъла и четири страни (фиг. 2.1). Сумата от ъглите на четириъгълника е равна на $360°$. Той може да се впише в окръжност тогава и само тогава, когато сумата от противоположните му ъгли е равна на $180°$. Четириъгълник с две двойки успоредни страни е успоредник.



Фигура 2.1

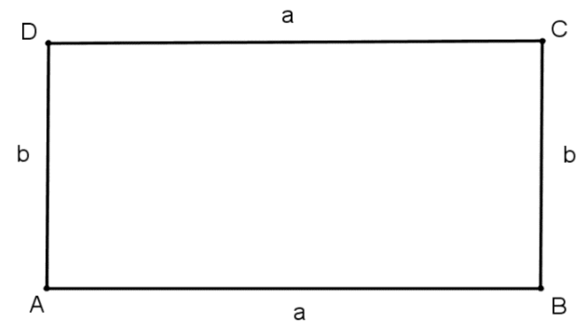
Лице на произволен четириъгълник: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$, където d_1 и d_2 са диагонали и $\measuredangle\ \alpha$ — ъгъл между тях.

Видове четириъгълници:

Правоъгълник

Правоъгълникът е успоредник с прав ъгъл (фиг. 2.2).

Квадратът е правоъгълник с равни страни.



Фигура 2.2

Свойства:

- В правоъгълник срещуположните страни са равни.
- В правоъгълник срещуположните ъгли са равни.
- В правоъгълник диагоналите се разполовяват от пресечната си точка.
- В правоъгълник диагоналите са равни.
- В правоъгълник ъглите са по $90°$.
- В правоъгълник пресечната точка на диагоналите е център на описаната окръжност.

Лице на правоъгълник**:** $S = a\,.\,b$

Периметър (обиколка): $P = 2a + 2b = 2(a + b)$

Диагонал: $d^2 = a^2 + b^2$

Приложения:

Фигура 2.3. Меню от Windows 8

Фигура 2.4. Знамето на България

Задачи за правоъгълник

Задача 1. Даден е правоъгълник $ABCD$ с диагонал 18 см и страна $DC = 17$ см. Да се намери периметъра на триъгълник $\triangle AOB$, където т. O е пресечна точка на диагоналите на правоъгълника.

Решение: От свойствата на правоъгълника следва че, $DC = AB = 17$ см и $AC = BD = 18$ см. За диагоналите по условие се знае, че $AC \cap BD = \text{т.} O$, от където следва, че $AO = OC = BO = OD = 9$ см.

Следователно $P_{\triangle AOB} = AB + AO + BO$.

$$P_{\triangle AOB} = 17 \text{ см} + 9 \text{ см} + 9 \text{ см} = 35 \text{ см}.$$

Задача 2. Даден е правоъгълник $ABCD$ с диагонал $BD = 10$ см и страна $AD = 6$ см. Да се намерят лицето и периметъра на правоъгълника. Да се пресметне $cos(\measuredangle BOC)$, където т. $O = BD \cap AC$.

Задача 3. Даден е правоъгълник $ABCD$, диагоналите на който се пресичат в т. O. Да се намери дължината на отсечката BC, ако $BD = 7$ см. и симетралата към отсечката AO минава през точката D.

Квадрат

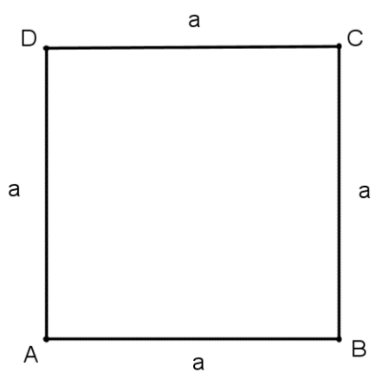
Квадратът е правоъгълник с четири равни страни и четири ъгли, равни на $90°$ (фиг. 2.5).

Елементи: a - дължина на страната, d – дължина на диагонала, R – радиус на описаната около квадрата окръжност, r – радиус на вписаната в квадрата окръжност.

Квадратът:

- има четири оси на симетрия - двата диагонала и двете симетрали на страните му;
- има център на симетрия - пресечната точка на диагоналите;

- има два диагонала, равни по дължина, разполовяващи се и са взаимно перпендикулярни;
- има диагонали, които разполовяват ъглите му. Пресечната точка на диагоналите му е център на вписаната и на описаната окръжност;
- е подобен на всеки друг квадрат.
- е правилен четириъгълник с централен ъгъл, равен на $90°$ и $a = R\sqrt{2}$, където R е радиусът на описаната около квадрата окръжност.



Фигура 2.5

Лице: $S = a\,.\,a = a^2$ $\qquad S = \frac{d^2}{2}$

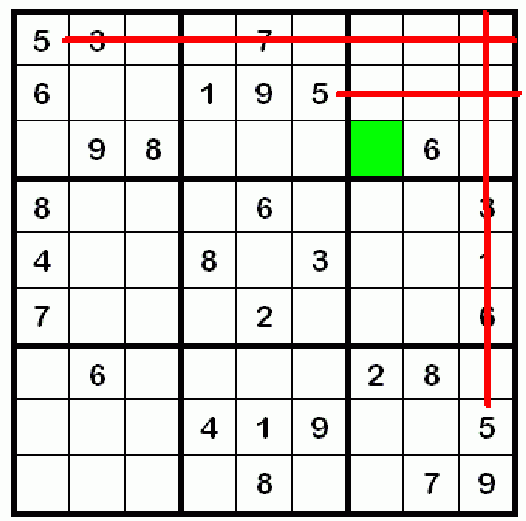
Периметър (обиколка): $P = 2a + 2a = 2(a + a) = 4a$

Диагонал: $d^2 = 2a^2$ $\qquad d = \sqrt{2}a$

Радиус на вписаната окръжност: $r = \frac{a}{2}$

Приложения:

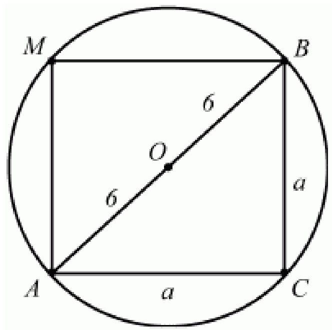
Фигура 2.6. Мода



Фигура 2.7. Судоку

Задачи за квадрат

Задача 1. Квадрат е вписан в окръжност с радиус $r = 6$ см. Да се намерят лицето и периметърът на квадрата (фиг. 2.8).



Фигура 2.8

Решение: От Питагоровата теорема за правоъгълния триъгълник $\Delta\ ACB$ следва:

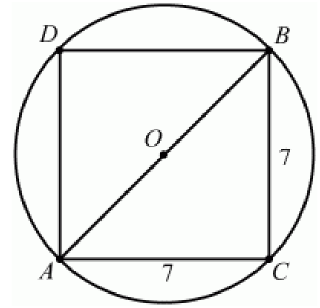
$$AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow 12^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow 144 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 72 \ \Rightarrow a = \ 6\sqrt{2} \text{ см.}$$

$$S = a^2 = 72 \text{ кв. см}$$

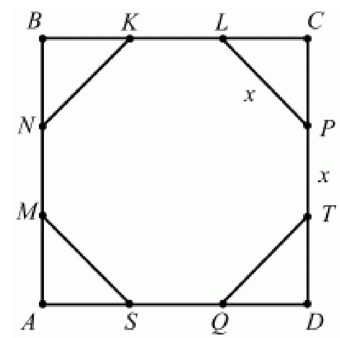
$$P = 4a = 4.6\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \text{ см}$$

Задача 2. Даден е квадрат $ABCD$ със дължина на страната 7 см. Да се намери дължината на диагонала AB (фиг. 2.9).



Фигура 2.9

Задача 3. В квадрат със страна 3 см е вписан правилен осмоъгълник както е показано на фиг. 2.14. Да се намери дължината на страната на осмоъгълника $KNMSQTPL$ (фиг. 2.10).

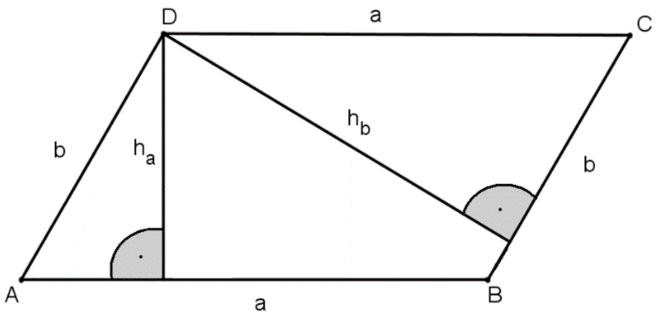


Фигура 2.10

Успоредник

Успоредникът е четириъгълник, срещуположните страни на който са две по две успоредни (фиг. 2.11).

Елементи: $a,\ b$ - дължини на страните, d_1, d_2 – дължини на диагоналите, h_a – височина, спусната към страната a, h_b – височина, спусната към страната b.



Фигура 2.11

Свойства:

- В успоредник срещуположните страни са равни.
- В успоредник срещуположните ъгли са равни.
- В успоредник диагоналите взаимно се разполовяват от пресечната си точка.
- Всеки два ъгъла, прилежащи на една и съща страна на успоредник, имат сбор, равен на $180°$.
- Пресечната точка на диагоналите на успоредника е негов център на симетрия.
- Всеки диагонал разделя успоредника на два еднакви триъгълника.

Лице: $S = a.h_a = b.h_b$

$$S = a.b.\sin\alpha = a.b.\sin\beta$$

Периметър: $P = 2(a + b)$

Диагонали: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

Приложения:

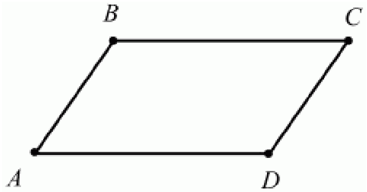
Фигура 2.12. Сграда

Фигура 2.13. Стойка за бинокъл

Фигура 2.14. Китара

Задачи за успоредник

Задача 1. В успоредник сумата от два срещулежащи ъгли е равна на $132°$. Да се намерят ъглите на успоредника (фиг. 2.15).



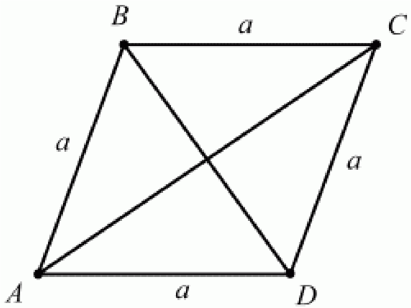
Фигура 2.15

Решение: Нека $\measuredangle\alpha = \measuredangle BAD$, $\measuredangle\beta = \measuredangle ADC$, $\measuredangle\gamma = \measuredangle DCB$, $\measuredangle\delta = \measuredangle CBA$. Избират се два срещуположни ъгъл, които да изпълняват даденото свойство в условието, например $\measuredangle\alpha$ и $\measuredangle\gamma$ така, че $\measuredangle\alpha + \measuredangle\gamma = 132°$.

От свойствата за ъглите в успоредник следва, че $\measuredangle\alpha = \measuredangle\gamma = \frac{132°}{2} = 66°$.

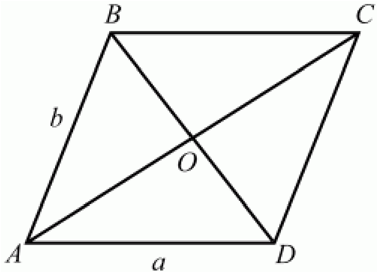
По определение $\measuredangle\alpha$ се явява остър ъгъл и равен на $66°$, а $\measuredangle\beta$ – тъп ъгъл с големина $180° - 66° = 114°$. Аналогично за другите два ъгъла.

Задача 2. Един от диагоналите на успоредник го разделя на две равностранни триъгълника със страна $a = 5$ см. Да се намерят дължините на диагоналите (фиг. 2.16).



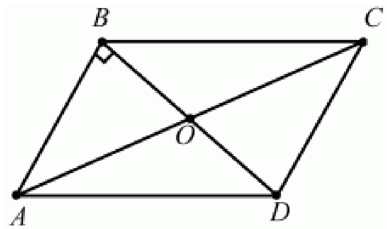
Фигура 2.16

Задача 3. Да се намери площта на успоредника на фиг. 2.17 с диагонали 3 см и 5 см и остър ъгъл, равен на $60°$ (фиг. 2.17).



Фигура 2.17

Задача 4. Даден е успоредник $ABCD$ с диагонали $BD = 6$ см и $AC = 2\sqrt{22}$ см. Диагоналът BD сключва прав ъгъл със страната на успоредника AB. Да се намерят дължините на страните на успоредника (фиг. 2.18).



Фигура 2.18

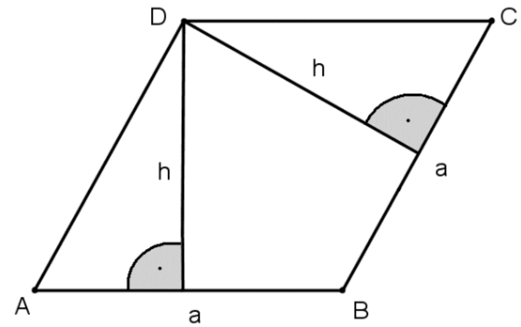
Ромб

Ромбът е успоредник с равни съседни страни (фиг. 2.19).

Елементи: $a,\ b$ - дължини на страните, d_1, d_2 – дължини на диагоналите, r – радиус на вписаната в квадрата окръжност.

Свойства:

- Четирите страни на ромба са равни.
- Две по две срещуположните страни са успоредни.
- Срещуположните ъгли в ромба са равни.
- Диагоналите на ромба се разполовяват от пресечната си точка.
- Диагоналите в ромба са взаимно перпендикулярни.
- Диагоналите на ромба разполовяват ъглите му.
- Диагоналите на ромба са негови оси на симетрия.
- Сборът от ъглите, прилежащи на всяка страна на ромба, е равен на $180°$.
- Сборът от всички ъгли на ромба е $360°$.



Фигура 2.19

Лице: $S = a.h$ $\qquad S = \frac{1}{2}d_1d_2$

$S = a^2.\sin\alpha$ $\qquad S = 2a.r$

Периметър: $P = 4a$

Диагонали: $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

$$d_1 = 2a.\cos\frac{\alpha}{2} = 2a.\sin\frac{\beta}{2}$$

$$d_2 = 2a.\sin\frac{\alpha}{2} = 2a.\cos\frac{\beta}{2}$$

Радиус на вписаната окръжност: $r = \frac{1}{2}\ a.\sin\alpha$

Приложения:

Фигура 2.20. Идеи за интериор

Фигура 2.21. Занимателна игра

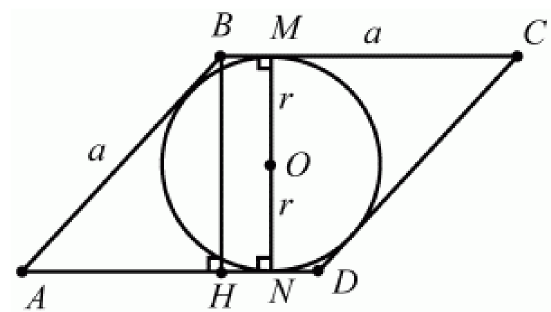
Задачи за ромб

Задача 1. Ромб има обиколка $12{,}4$ см. Лицето му е $6{,}2$ кв.см. Намерете височината на ромба.

Решение: По условие са дадени $P = 12{,}4$ см и $S = 6{,}2$ кв. см. Може да се образува система, от която ще се изрази търсената височина:

$$\begin{cases} P = 12{,}4 = 4a \\ S = 6{,}2 = a.h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{12{,}4}{4} = 3{,}1 \text{ см} \\ h = \dfrac{6{,}2}{3{,}1} = 2 \text{ см} \end{cases}$$

Задача 2. Тъпият ъгъл на ромб е 5 пъти по-голям от острия. Колко пъти страна на ромба е по-голяма от радиуса на вписаната в него окръжност (фиг. 2.22).



Фигура 2.22

Трапец

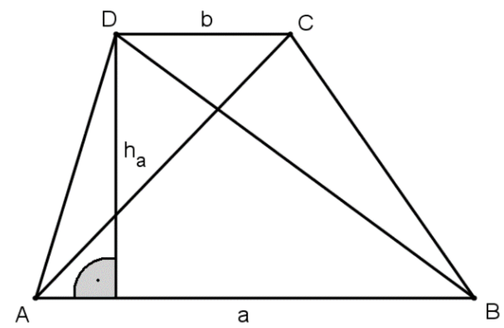
Трапецът е четириъгълник, в който две срещуположни страни са успоредни. Успоредните страни се наричат

основи на трапеца — долна и горна. Страните, свързващи крайните точки на основите на трапеца (без да се пресичат във вътрешността му), се наричат **бедра**. Отсечките, свързващи срещуположните ъгли, се наричат **диагонали**. Отсечката, свързваща средите на бедрата на трапеца, се нарича **средна основа** (фиг. 2.23).

Елементи: a, b – основи; другите две страни се наричат бедра на трапеца ($c = AD,\ d = BC$); h_a – височина; $d_1 = AC, d_2 = BD$ – диагонали.

Свойства:

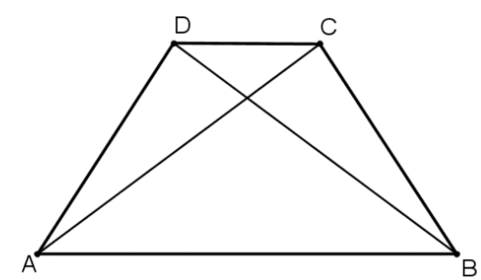
- Средната основа на трапеца е успоредна на основите и е равна на полусбора им.
- **Обобщена теорема на Талес:** Успоредните прави, пресичащи страните на ъгъл, отсичат от страните на ъгъла пропорционални отсечки.
- При равнобедрения трапец ъглите при основата са равни.
- При равнобедрения трапец диагоналите са равни.
- Около всеки равнобедрен трапец може да се опише окръжност.
- Ако сборът от дължините на основите на трапеца е равен на сбора от дължините на бедрата, то в него може да се впише окръжност.
- В трапеца средите на основите и пресечните точки на диагоналите и на продълженията на бедрата лежат на една права.
- Сборът от големините на ъглите, прилежащи на бедрата, е $180°$.
- Ако права минава през средата на бедро на трапец и е успоредна на основите му, то тя разполовява другото бедро на трапеца.



Фигура 2.23

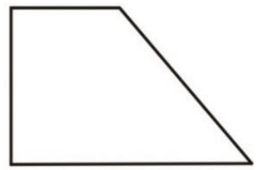
Видове трапеци:

Трапец, чиито бедра са равни, се нарича **равнобедрен** (фиг. 2.24).



Фигура 2.24

Трапец, на който един от ъглите е прав, се нарича **правоъгълен** (фиг. 2.25).

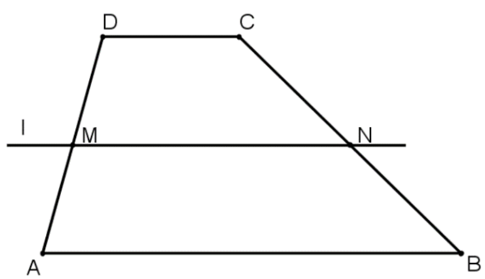


Фигура 2.25

Лице: $S = \frac{1}{2}(a+b)h_a$

Периметър: $P = a + b + c + d$

Средна основа (фиг. 2.26): $\frac{a+b}{2} = MN$



Фигура 2.26

Приложения:

Фигура 2.27. Строителни инструменти

Фигура 2.28. Екстериор

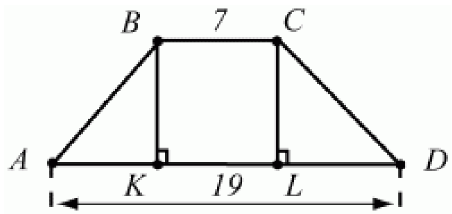
Фигура 2.29. Интериорен дизайн

Задачи за трапец

Задача 1. В равнобедрен трапец $ADCB$ е спусната височина BK към основата AD, равна на 3 см. Ако се знае, че $AD = 19$ см и $BC = 7$см, да се намерят дължината на бедрото, лицето и периметърът на трапеца (фиг. 2.30).

Решение: $S = \frac{1}{2}(a+b).h \ = \frac{1}{2}(19+7).3 = 39$ кв. см.

За да се пресметне периметърът на трапеца, първо трябва да се изчисли дължината на бедрото му.



Фигура 2.30

Като се спусне втората височина CL, която има дължина 3 см, се получава правоъгълникът $KLCB$, за който $BC = KL = 7$ см, от където може да се пресметнат дължините на отсечките AK и DL:

$$AD = AK + KL + LD$$

$$19 = AK + 7 + LD$$

От свойствата на равнобедрения трапец се доказва, че отсечките AK, LD имат равни дължини.

$$\Rightarrow\ 19 = 2\,AK + 7$$

$$\Rightarrow AK = \frac{19-7}{2} = 6 \text{ см.}$$

Разглежда се $\triangle AKB$ (правоъгълен) като се прилага Питагорова теорема, за да се определи дължината на AB, т.е. $AB^2 = AK^2 + BK^2$,

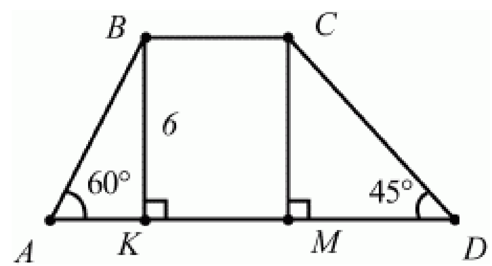
$$AB^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow AB^2 = 45 \text{ см}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ см}$$

$$P = AD + DC + CB + BA$$

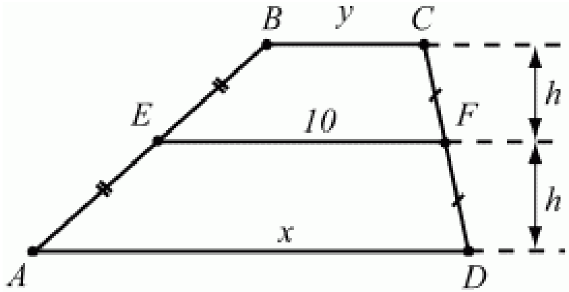
$$P = 26 + 6\sqrt{5} \text{ см}$$

Задача 2. Ъглите при основата на произволен трапец са $60°$ и $45°$, височината е равна на 6 см. Да се намерят бедрата на трапеца (фиг. 2.31).



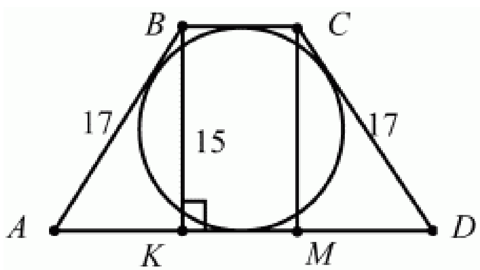
Фигура 2.31

Задача 3. Средната основа на произволен трапец е равна на 10 см и дели площта на трапеца в отношение $3:5$. Да се намери дължината на основата на трапеца (фиг. 2.32).



Фигура 2.32

Задача 4. Около окръжност с диаметър 15 см е описан равнобедрен трапец с дължина на бедрото 17 см. Да се намери дължината на основата на трапеца (фиг. 2.33).



Фигура 2.33

Допълнителен материал

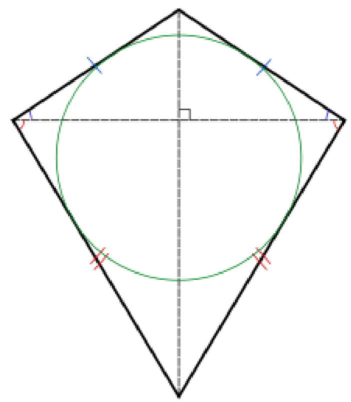
Делтоид

Делтоидът е геометрична фигура, за която:

- Две по две съседните страни са съответно равни.
- Всяка страна има поне една равна на нея съседна страна.
- Диагоналите са перпендикулярни.
- Двете отсечки, свързващи противоположни точки на докосване имат еднаква дължина (фиг. 2.34).

Елементи: d_1, d_2 – диагонали; a, b – две от страните с различна дължина; φ – ъгълът между тях.

Лице: $S = \frac{d_1.d_2}{2}$ $\qquad$ $S = a.b.\sin\varphi$



Фигура 2.34

Фигура 2.35. Хвърчила

Правилни многоъгълници

В зависимост от броя на страните им многоъгълниците са триъгълници, четириъгълници, петоъгълници и т. н. Многоъгълник с n върха се нарича n-ъгълник.

Видове многоъгълници според разположението на страните: изпъкнал, ако е изпълнено едно от следните еквивалентни условия:

- лежи от едната страна на всяка права, съединяваща два негови съседни върха (т.е. продълженията на страните на многоъгълника не пресичат други негови страни);
- всяка отсечка, определена от точки на многоъгълника, изцяло лежи в него;
- представлява сечение на няколко полуравнини.

Изпъкналият многоъгълник се нарича правилен, ако всички негови страни са равни и всички негови ъгли са също равни - например равностранен триъгълник, квадрат и т. н.

Лице на многоъгълник: $S = n.S_{\Delta\ AOB}$

Периметър на многоъгълник: $P = n.a$

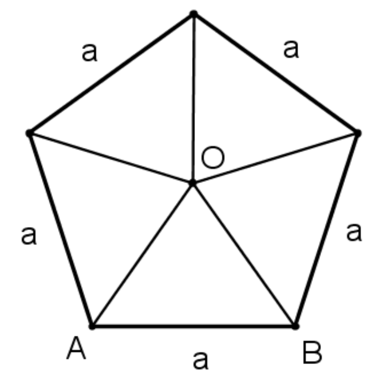
Правилен петоъгълник

Петоъгълникът (пентагон) е многоъгълник с пет страни. Вътрешният ъгъл е равен на 108^O. Сборът на вътрешните ъгли е равен на 540^O. Градусната мярка на външния ъгъл е 72^O. Градусната мярка на централния ъгъл е 72^O (фиг. 2.36).

Елементи: a – дължина на страната; n – брой страни.

Лице на петоъгълник: $S = 5.S_{AOB}$

Периметър на петоъгълник: $P = 5a$

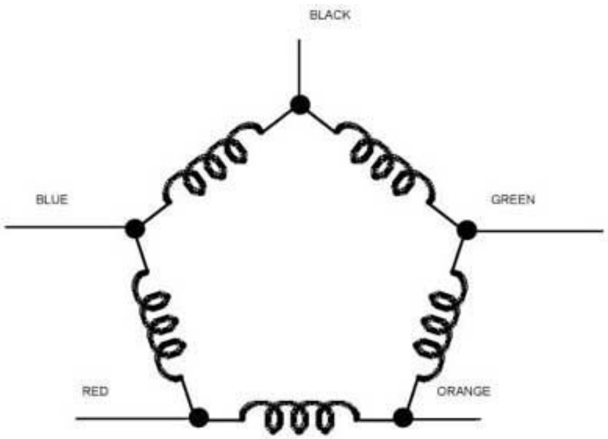


Фигура 2.36

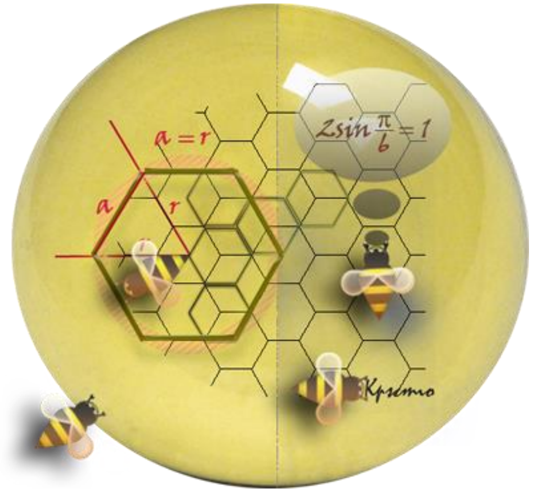
Приложения:

Фигура 2.37. Беседка

Фигура 2.38. Нова форма за чадър от Китай



Фигура 2.39. Електрическа схема на двигател

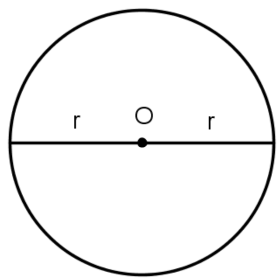


Фигура 2.40. Пчелна решетка

Фигура 2.41. Пентагона

3. Окръжност

Окръжността е равнинна крива, образувана от множеството от точки, намиращи се на едно и също разстояние r от определена точка O. Разстоянието r се нарича радиус, а т.O – център на окръжността.



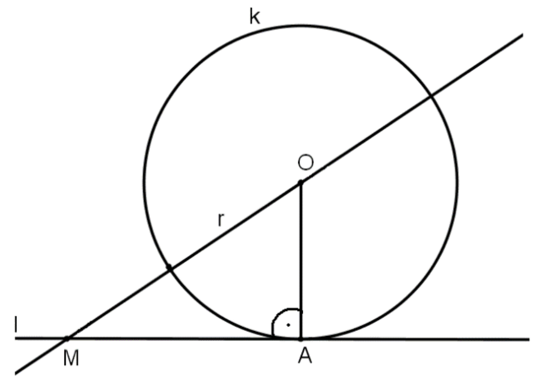
Фигура 3.1

Окръжността е затворена крива, а фигурата, съставена от точките във вътрешността й , т.е. точките на разстояние от центъра, по-малко (или по-малко и равно) от радиуса, се нарича кръг (затворен кръг). Диаметър на окръжността е отсечка, свързваща две точки от нея и преминаваща през центъра. Нейната дължина е равна на $2r$ (фиг. 3.1).

Свойства:

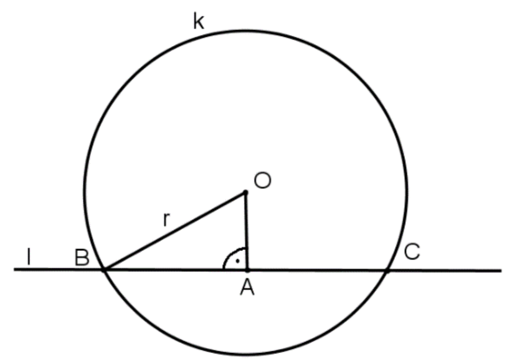
- Права и окръжност може да нямат общи точки, да имат една обща точка — правата е допирателна, и да имат две общи точки — правата е секуща.
- През три точки, които не лежат на една права, може да се прекара само една окръжност.
- Допирната точка на две окръжности лежи на правата, съединяваща техните центрове.

Допирателна (тангента, $\boldsymbol{l}$) се нарича права, имаща само една обща точка с окръжност, точката се нарича допирна точка, т.е. когато $l \cap k = A$ (фиг. 3.2).



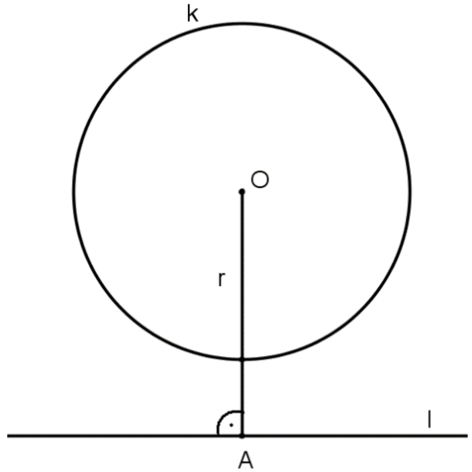
Фигура 3.2

Секуща ($\boldsymbol{l}$) се нарича права, която има две общи точки с окръжност ($l \cap k = \{B, C\}$), т.е. когато $OA < r$ (фиг. 3.3).



Фигура 3.3

Когато $OA > r$, тогава правата l и окръжността нямат обща точка (фиг. 3.4).

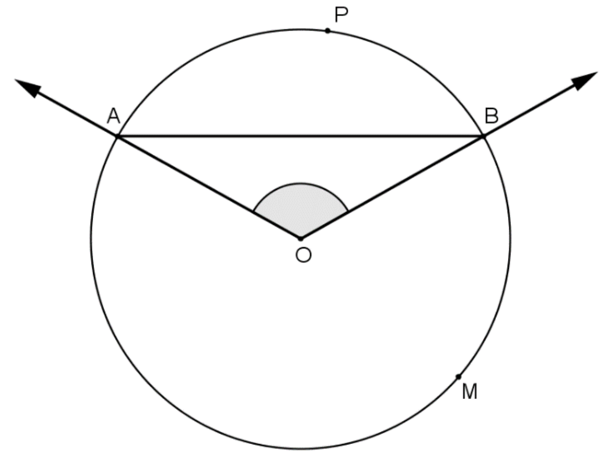


Фигура 3.4

Централен ъгъл ($\measuredangle\, \boldsymbol{AOB}$) на окръжност се нарича ъгъл, чийто връх съвпада с центъра на окръжността (фиг. 3.5).

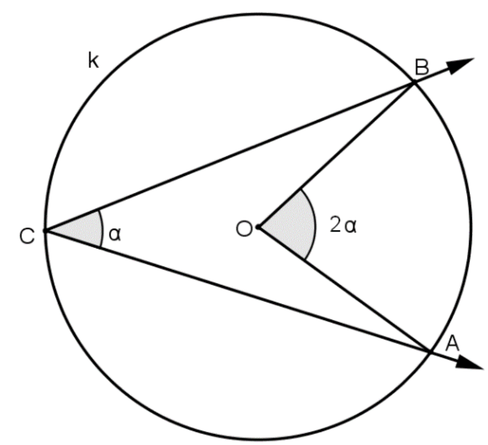
Отсечка, съединяваща две точки от окръжност, се нарича **хорда ($\boldsymbol{AB}$)**. Диаметърът на окръжността е хорда, минаваща през центъра му (фиг. 3.5).

Всеки две точки от окръжността я делят на две части, които се наричат **дъги на окръжността ($\widehat{\boldsymbol{APB}}$ – малка дъга, $\widehat{\boldsymbol{AMB}}$ – голяма дъга).** Дъгата се нарича **полуокръжност**, ако отсечката, съединяваща краищата ѝ, е **диаметър** (фиг. 3.5).



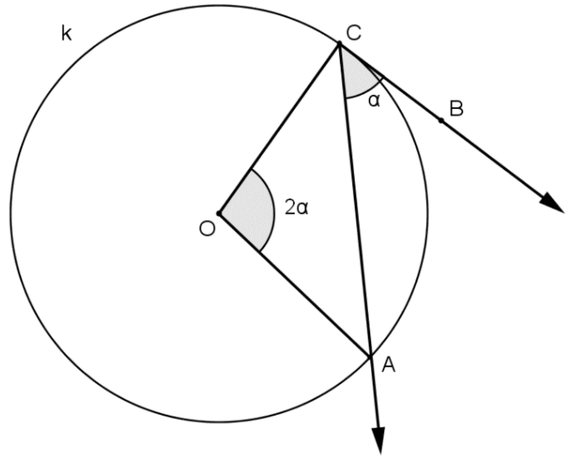
Фигура 3.5

Вписан ъгъл ($\measuredangle\, \boldsymbol{ACB}$) се нарича ъгъл, чийто връх лежи на окръжността, а раменете му са секущи $\Rightarrow$ $\measuredangle\, ACB = \frac{1}{2} \measuredangle\, AOB$ (фиг. 3.6).



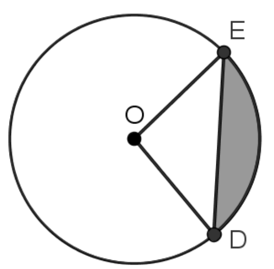
Фигура 3.6

Периферен ъгъл ($\measuredangle\, \boldsymbol{ACB}, \measuredangle\, \boldsymbol{\alpha}$) се нарича ъгъл, на който върхът е точка от окръжността, едното рамо е допирателна към окръжността, а другото пресича окръжността $\Rightarrow \measuredangle\, ACB = \frac{1}{2} \measuredangle\, AOC$ (фиг. 3.7).



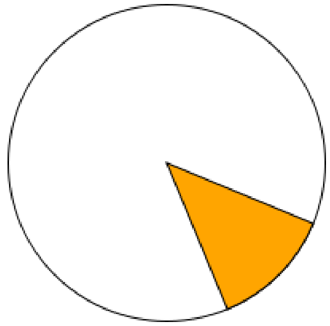
Фигура 3.7

Сегмент ($\boldsymbol{ED}$) се нарича част от кръг, ограничена от дъга и прилежащата ѝ хорда (фиг. 3.8).



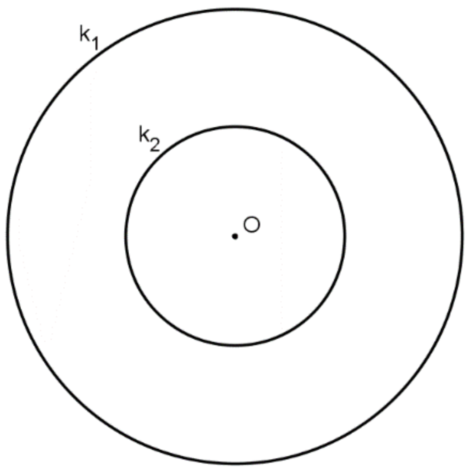
Фигура 3.8

Кръгов сектор или просто **сектор** се нарича част от кръг, ограничена от дъга и два радиуса, които съединяват краищата на дъгата с центъра на кръга (фиг. 3.9).



Фигура 3.9

Две окръжности, които имат общ център, се наричат **концентрични** (фиг. 3.10).



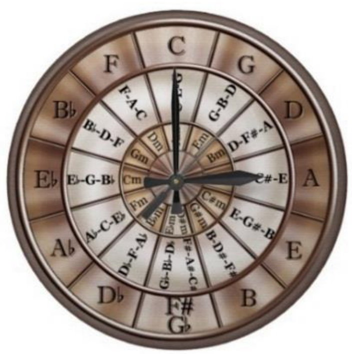
Фигура 3.10

Лице на кръг: $S = \pi . r^2$

Периметър (обиколката) на кръг, или дължината на окръжност: $P = 2\pi r = \pi d$

Приложения:

Фигура 3.11. Пътни знаци



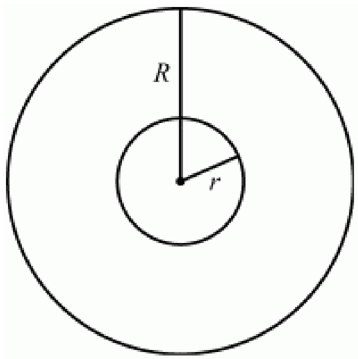
Фигура 3.12. Дизайн на часовник с музикални знаци

Фигура 3.13. Интериор на маса

Фигура 3.14. Изследване на житните кръгове

Задачи за окръжност

Задача 1. Дадени са две концентрични окръжности. Дължината на едната от тях е 33π , а на другата - 27π. Да се намери ширината на пръстена (фиг. 3.15).



Фигура 3.15

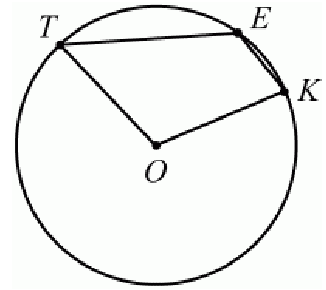
Решение: От формулата за дължина на окръжност могат да се пресметнат радиусите на концентричните окръжности и разликата им ще се яви точно ширината на пръстена. Нека $P_m -$ дължина на малката окръжност, а $P_g -$ дължина на голямата окръжност

$$P_m = 2\pi r = 27\pi \Rightarrow r = 13{,}5 \text{ см},$$

$$P_g = 2\pi R = 33\pi \Rightarrow R = 16{,}5 \text{ см},$$

$$.R - r = 16{,}5 - 13{,}5 = 3 \text{ см}.$$

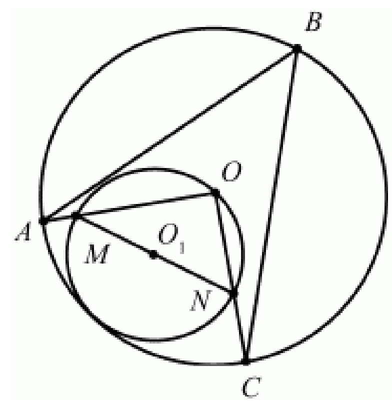
Задача 2. Да се намери $\measuredangle TOK$, ако т. O е център на окръжността и $\measuredangle TEK = 120°$ (фиг. 3.16).



Фигура 3.16

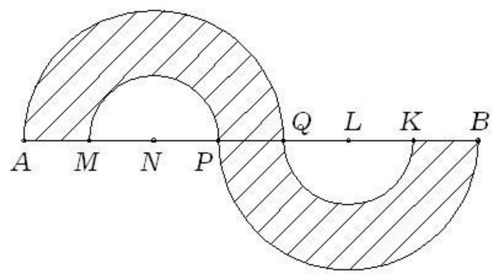
Задача 3. Да се намери площта на сектор от кръг с радиус $R = 4$ см и централен ъгъл от $30°$**.**

Задача 4. Като се използва дадената фигура, да се определи градусната мярка на вписания ъгъл $\measuredangle ABC$ (фиг. 3.17).



Фигура 3.17

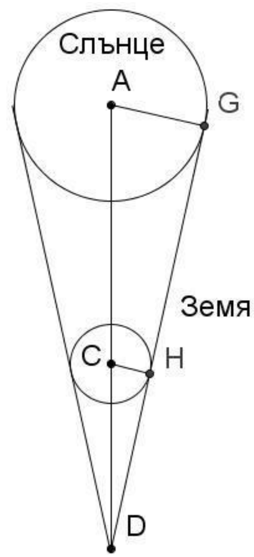
Задача 5. Ако $AM = MN = NP = PQ = QL = LK = KB = 3$ см, пресметнете обиколката и лицето на защрихованата фигура (фиг. 3.18).



Фигура 3.18

Задача 6. Радиусът на Слънцето е приблизително $700\,000$ км, а на Земята $6\,400$ км.

Пресметнете на какво разстояние от центъра на Земята е върхът на нейната сянка, ако разстоянието между центровете на Земята и Слънцето е приблизително $150\,000\,000$ км (фиг. 3.19).



Фигура 3.19

4. Пирамида

Пирамидата е многостен, образуван от свързването на всеки от върховете на n-ъгълник ($n = 3, 4, \ldots$), наречен **основа**, с точка, нележаща в равнината му, наречена **връх** на пирамидата.

Стените, едната страна на които е страна на основата, а другите две сключват помежду си ъгъл при върха на пирамидата, се наричат **околни стени**.

Страните на основата се наричат **основни ръбове**, а останалите ръбове на пирамидата - **околни ръбове**. Околните стени на пирамидата са триъгълници.

Правата, спусната от върха към равнината на основата и образуваща прав ъгъл с нея, се нарича **височина** на пирамидата и се бележи с $\boldsymbol{h}$.

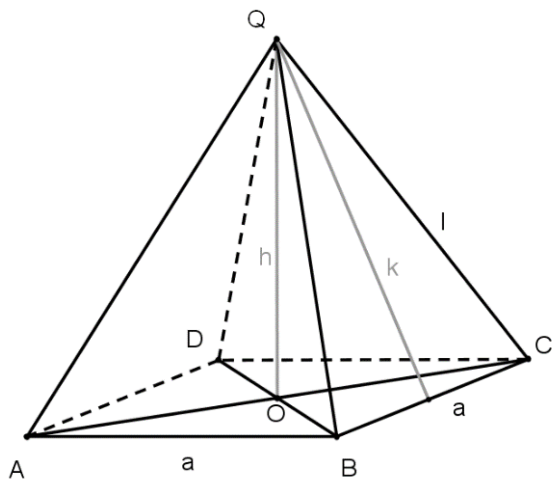
Височина на околна стена, спусната от върха на пирамидата към основния ръб, се нарича **апотема**.

Сборът от лицата на околните стени на пирамидата се нарича **околна повърхнина**, а сборът от околната повърхнина и лицето на основата - **пълна повърхнина**.

Използвани означения:

- a - апотема на *основата* (ако основата е правилен многоъгълник);
- K - апотема на *пирамидата* (това е височината на триъгълниците);

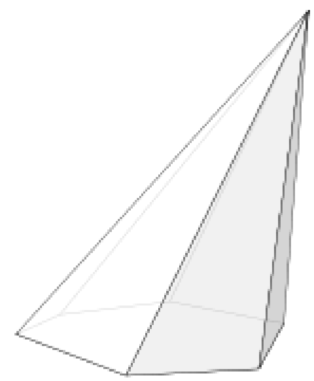
- b - основен ръб (страната на основата на пирамидата);
- l - околен ръб;
- B - лице на основата.



Фигура 4.1. Правилна четириъгълна пирамида

Видове пирамиди:

- **Права пирамида** - пирамида, петата на височината на която е център на основата.
- **Правилна пирамида** - пирамида с основа правилен многоъгълник и равни околни ръбове (фиг. 4.1).
- **Наклонена пирамида** - пирамида, петата на височината на която не е център на основата (фиг. 4.2).
- **Пресечена пирамида** - многостен, заключен между основа на пирамида и нейно успоредно сечение.
- **Тетраедър** - триъгълна пирамида.
- **Правоъгълен тетраедър** - тетраедър, трите ъгла при един връх на който са равни.
- **Правилен тетраедър** - тетраедър, четирите страни на който са еднакви равностранни триъгълници.



Фигура 4.2. Наклонена пирамида

Лицето на **околната повърхнина** на *правилна* пирамида се намира по формулата

$$S = \frac{P.k}{2}$$

където P е периметърът на основата, а k е апотемата.

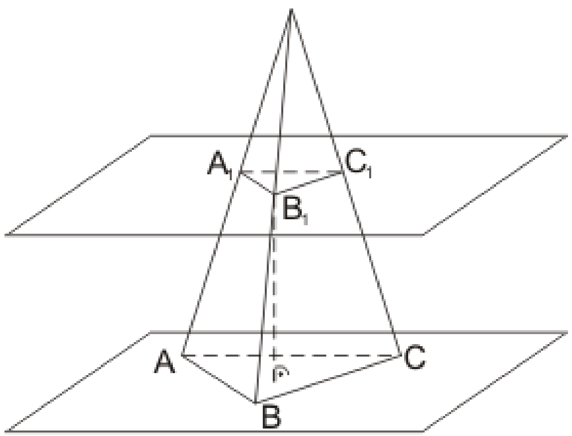
Лицето на **пълната повърхнина** (на *правилна* пирамида) се пресмята по формулата: $S_1 = S + B$.

Обемът на произволна пирамида се намира по формулата:

$$V = \frac{B.h}{3}$$

където B е лицето на основата.

Пресечена пирамида - Околните стени на пресечена пирамида са трапеци. Лицето на **пълната повърхнина** на пресечена пирамида е сборът от лицата на тези трапеци и лицата на двете основи (фиг. 4.3).



Фигура 4.3. Пресечена пирамида

Обемът на пресечена пирамида с лица на основите B_1 и B_2 и височина h е

$$V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}).$$

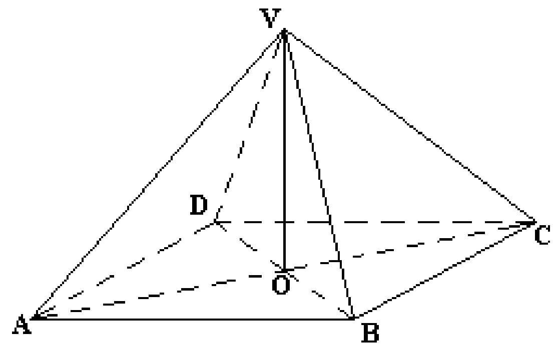
Приложения:

Фигура 4.4. Пирамидите в Египет

Фигура 4.5. Пирамида

Задачи за пирамида

Задача 1. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $a = 4$ см и околен ръб $l = 6$ см. Да се намерят лицето на околната и пълната повърхнина на пирамидата, както и нейният обем (фиг. 4.6).



Фигура 4.6

Решение: Нека т. H лежи на отсечката AB. За да се намери дължината на апотемата на пирамидата, се прилага Питагорова теорема за $\triangle AHV$, където VH е височина в $\triangle ABV$:

$$AH = \frac{AB}{2} = 2 \text{ см}, \quad AV = BV = 6 \text{ см}$$

$$AV^2 = AH^2 + HV^2$$

$$36 = 4 + HV^2 \Rightarrow HV = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ см}$$

$$S = \frac{P.k}{2} = \frac{4.4.4\sqrt{2}}{2} = 32\sqrt{2} \text{ кв. см.}$$

$$B = a.a = 4.4 = 16 \text{ кв. см.}$$

$$S_1 = S + B = 32\sqrt{2} + 16 \text{ кв. см.}$$

За да се намери дължината на височината на пирамидата, се прилага Питагорова теорема за $\triangle HOV$, където VO е височина на пирамидата.

$$OH = \frac{AB}{2} = 2\text{см}, \quad HV = 4\sqrt{2} \text{ см}$$

$$HV^2 = OH^2 + OV^2$$

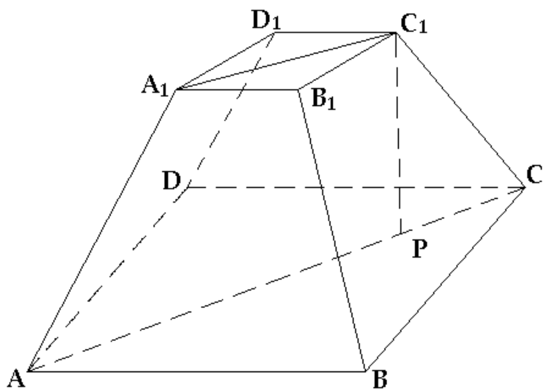
$$32 = 4 + OV^2 \Rightarrow OV = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ см}$$

$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.16.2\sqrt{7} = \frac{32}{3}\sqrt{7} \text{ куб. см.}$$

Задача 2. В правилна четириъгълна пирамида основният ръб е 8 см, а височината 2 см. Да се намерят околния ръб, лицето на околната повърхнина и обемът на пирамидата.

Задача 3. Основата на пирамида е равнобедрен триъгълник с основа 6 см и бедро 5 см. Околните стени на пирамидата сключват с основата ъгъл $45°$. Да се намери обемът на пирамидата.

Задача 4. Височината на правилна четириъгълна пресечена пирамида е 10 см, а основните й ръбове са 5 см и 12 см. Да се намери лицето на диагоналното сечение (фиг. 4.7).



Фигура 4.7

5. Цилиндър

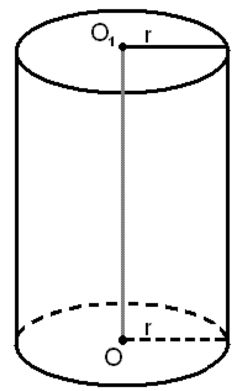
Цилиндърът е геометрично тяло, заградено от цилиндрична повърхнина и две равнинни сечения. Той няма върхове.

Цилиндрична повърхнина е повърхнина, която се описва от права с постоянно направление, хлъзгаща се по крива, наречена **управителна крива**. Правата и всички успоредни на нея, които минават през точките на управителната крива, се наричат **образуващи**. Разстоянието h между двете основи се нарича **височина** на цилиндъра.

Видове цилиндри:

- Ако образуващите са перпендикулярни на основите, цилиндърът е **прав**.
- Ако не е изпълнено горното изискване, цилиндърът е **наклонен**.
- Когато основите на прав цилиндър са кръгове, той е **прав кръгов цилиндър**.

Правият кръгов цилиндър е ротационно тяло, чиято ос на симетрия минава през центровете на горната и долната основа и се нарича ос на цилиндъра. Може да се разглежда като ротационно тяло, получено при въртенето на правоъгълник около една от страните му (фиг. 5.1).



Фигура 5.1. Прав кръгов цилиндър

Ако прав кръгов цилиндър има височина h и радиус r, то **обемът** му се намира с формулата

$$V = \pi r^2 h.$$

Лицето на пълната повърхнина на цилиндър се намира по формулата

$$S_1 = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h).$$

Лицето на околната повърхнина се намира по формулата

$$S = 2\pi rh.$$

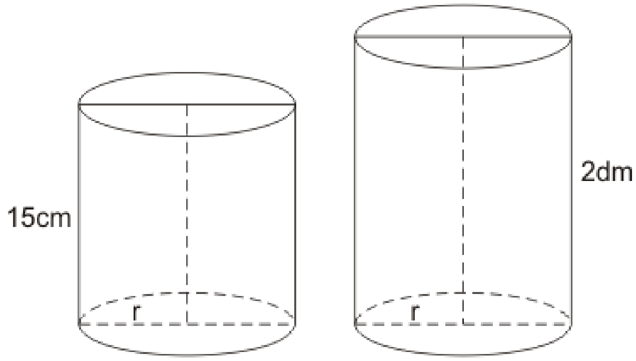
Приложения:

Фигура 5.2 Тебешири

Фигура 5.3 Промишлен компресор

Задачи за цилиндър

Задача 1. Два цилиндъра имат еднакви основи. Лицето на околната повърхнина на единия е 300π кв. см, а височината му е 15 см. Височината на втория цилиндър е 2 дм. Да се намери лицето на околната му повърхнина (фиг. 5.4).



Фигура 5.4

Решение:

$$S_{\text{м}} = 2\pi . r . l_{\text{м}}$$

$$300\pi = 2\pi . r . 15$$

$$r = 10 \text{ см}$$

$$S_{\text{г}} = 2\pi . r . l_{\text{г}} = 2\pi . 10.20 = 400\pi \text{ кв. см.}$$

Задача 2. Да се намери обемът на съд с форма на цилиндър, ако дължината на окръжността на основата му е 8π см, а височината му е равна на диаметъра на основата.

Решение: Използва се формулата $S = 2\pi.r.h$ Дължината на окръжността на основата се намира по следния начин:

$$2\pi.r = 8\pi \Rightarrow r = 4 \text{ см} \Rightarrow d = 2r = 8 \Rightarrow h = 8 \text{ см}$$

$$V = \pi.r^2.h = \pi.16.8 = 128\pi \text{ куб. см.}$$

Задача 3. Правоъгълник със страни 8 см и 10 см е завит така, че да се получи прав кръгов цилиндър. Да се намери лицето на околната повърхнина на получения цилиндър.

Задача 4. Даден е цилиндър с обем 100 куб. см и лице на основата 25 кв. см. Да се намери дължината на височината и радиуса на цилиндъра.

Задача 5. Лицето на околната повърхнина на цилиндър е 24π, а обемът му е 36π. Да се намери радиусът на цилиндъра.

6. Конус

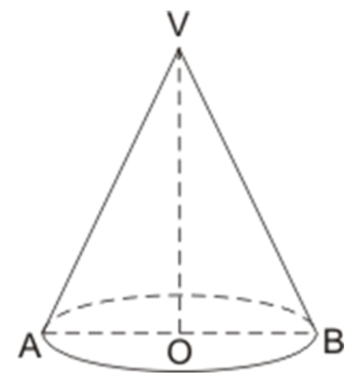
Конусът е тяло, ограничено от равнина и конична повърхнина, определена от проста затворена управителна крива.

Повърхнината му се състои от равнинна *основа* и конична околна повърхнина, която е част от коничната повърхнина.

Лежащите върху околната повърхнина отсечки от нейните образуващи се наричат **образуващи на конуса**. Разстоянието от върха на конуса до основата се нарича **височина на конуса**.

Видове конуси:

- Конус, чиято управителна крива е окръжност, се нарича **кръгов конус**. Правата, минаваща през върха на конуса и центъра на окръжността, се нарича ос на конуса. Сечението на кръгов конус с равнина през оста му се нарича **осно сечение**.
- Кръгов конус, чиято ос е перпендикулярна на основата, се нарича **прав кръгов конус** (фиг. 6.1).
- Кръгов конус, чиято ос не е перпендикулярна на основата, се нарича **наклонен**.



Фигура 6.1. Прав кръгов конус

При прав кръгов конус с радиус на основата r, височина h и образуваща l, **лице на околната повърхнина** се намира по формулите за лице на околна и пълна повърхнина:

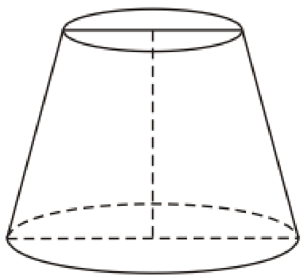
$$S = \pi . r . l$$

$$S_1 = \pi . r(r + l),$$

Обемът на прав кръгов конус се намира по формулата

$$V = \frac{1}{3} . \pi . r^2 . h$$

Пресечен кръгов конус - тяло, което е част от кръгов конус, заключена между основата му и едно негово успоредно сечение (наричано също основа) (фиг. 6.2).



Фигура 6.2. Прав кръгов пресечен конус

Отсечката от образуващата на конуса, заключена между двете основи, се нарича **образуваща на пресечения конус**. Разстоянието между двете основи се нарича **височина на пресечения конус**. Частта от околната повърхнина на дадения кръгов конус, ограничена от двете основи на пресечения конус, се нарича околна повърхнина на пресечения конус. Обединението от околната повърхнина и лицата на двете основи се нарича повърхнина (или пълна повърхнина) на пресечения конус.

Формулите за повърхнина и обем на пресечен кръгов конус са съответно:

$$S = \pi(r + r_1) . l$$

$$S_1 = \pi . (r + r_1) . l + \pi . r^2 + \pi . r_1^2$$

$$V = \frac{1}{3} . \pi . h(r^2 + r_1^2 + r r_1)$$

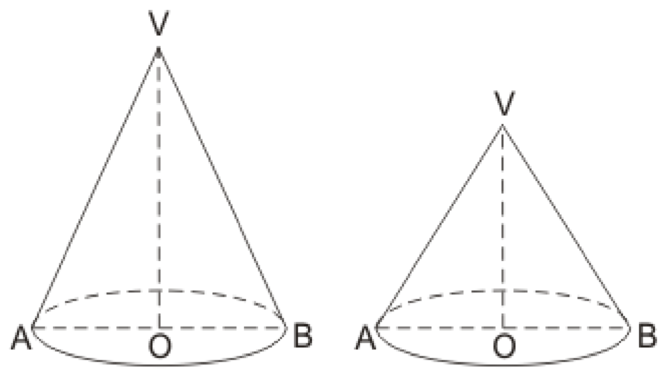
Приложения:

Фигура 6.3. Карнавална шапка конус

Фигура 6.4. Бинокъл

Задачи за конус

Задача 1. Радиусите на основите на два конуса са равни на 6 см, а образуващите им на 15 см и 21 см. Да се намери отношението на околните им повърхнини (фиг. 6.5).



Фигура 6.5

Решение: Използва се основната формула за лице на околна повърхнина за двата конуса: $S = \pi . r . l$

$$S_{\text{г}} = \pi . 21.6 = 126 \text{ кв. см.}$$

$$S_{\text{м}} = \pi . 15.6 = 90 \text{ кв. см.}$$

$$\frac{S_{\text{г}}}{S_{\text{м}}} = \frac{126\pi}{90\pi} = \frac{7}{5}$$

Задача 2. Сборът от дължините на височината и образуващата на конус е 9 см, а лицето на пълната му повърхнина е 24π куб. см. Да се намери обемът на конуса, ако радиусът му е равен на 3 см.

Решение:

$$h + l = 9 \Rightarrow h = 9 - l$$

$$S_1 = 24\pi \Rightarrow \pi . r(r + l) = 24\pi \ \Rightarrow r(r + l) = 24$$

$$3(3 + l) = 8 \ \Rightarrow l = 5 \text{ см} \ \Rightarrow h = 9 - 5 = 4 \text{ см}$$

$$V = \frac{\pi . l^2 . h}{3} = \frac{\pi . 9.4}{3} = 12\pi \text{ куб. см.}$$

Задача 3. Правоъгълен триъгълник с катети 12 см и 5 см и хипотенуза 13 см се върти около хипотенузата. Да се намери повърхнината на получения конус.

Задача 4. Образуващата на прав конус е 12 см, височината му е 6 см. Да се намерят лицето на околната повърхнина, лицето на повърхнината и обемът на конуса.

Тест

Задача 1. Да се определи видът на триъгълник със страни 8 см, 6 см и 11 см:

а) остроъгълен

б) тъпоъгълен

в) правоъгълен

г) разностранен.

Задача 2. В $\triangle ABC$ с ъгъл $\measuredangle ACB = 120°$ е построена медианата MC. Ако $AC = 6$ см, $BC = 4$ см, то да се намери дължината на медианата

а) $\sqrt{6}$ см

б) $\sqrt{5}$ см

в) $\sqrt{2}$ см

г) $\sqrt{7}$ см.

Задача 3. В $\triangle ABC$, AD е ъглополовяща. Да се намери периметърът на триъгълника, ако $AC = 4$ см, $DC = 2$ см, $BD = 3$ см.

а) 15 см

б) 19 см

в) 10 см

г) 20 см.

Задача 4. В $\triangle ABC$, $AB = BC = 12$ см, $\measuredangle ABC = 120°$. Да се определи дължината на височината BH и дължината на AC.

а) 6 см; $6\sqrt{3}$ см

б) 8 см; $4\sqrt{2}$ см

в) 10 см; $\sqrt{106}$ см

г) 12 см; $5\sqrt{8}$ см.

Задача 5. Да се намери лицето на повърхнината на цилиндър с радиус 2 см и образуваща 1 см .

а) 12π кв. см

б) 15π кв. см

в) 13π кв. см

г) 14π кв. см

Задача 6. Да се намери обемът на цилиндър с радиус $1{,}5$ см и височина 2 см.

а) 12π куб. см

б) $4{,}5\pi$ куб. см

в) 3π куб. см

г) 4π куб. см

Задача 7. Лицето на основата на прав кръгов конус е 9π кв. см., а пълната му повърхнина е 24π кв. см. Да се намери обемът му.

а) 20π куб. см

б) 5π куб. см

в) 12π куб. см

г) 4π куб. см

Задача 8.. Правилна четириъгълна пирамида има височина $h = 4$ см, околната повърхнина $S = 60$ кв. см и повърхнина $S_1 = 96$ кв. см. Да се намери дължината на основния ръб на пирамидата.

а) 2 см

б) 5 см

в) 6 см

г) 3 см

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

[1] Андрей, П. Геометрия. Планиметрия в тезисах и решениях. 9 класс, www. e-reading.lib.com

[2] Учебен център „Солема“, www.solemabg.com

[3] Формули по математика, www. format.netne.net